

## TRẮC ĐỊA – BẢN ĐỒ & QUẢN LÝ ĐẤT ĐAI (trang 58÷67)

### XÁC ĐỊNH ĐỘ CAO GEOID VÀ DỊ THƯỜNG TRỌNG LỰC TỪ CÁC HỆ SỐ HÀM ĐIỀU HÒA CẦU

NGUYỄN VĂN SÁNG, Trường Đại học Mỏ - Địa chất  
PHẠM VĂN TUYẾN, Công ty cổ phần Dịch vụ và thương mại 568

**Tóm tắt:** Bài báo trình bày chi tiết các công thức toán học, để tính độ cao geoid và dị thường trọng lực trên cơ sở sử dụng các hệ số hàm điều hòa cầu của các mô hình thế trọng trường và được lập thành chương trình máy tính "Geomat2015" bằng ngôn ngữ lập trình Matlab. Các tính toán thực nghiệm được thực hiện với các hệ số hàm điều hòa cầu của mô hình thế trọng trường toàn cầu EGM2008 và vùng thực nghiệm là trên vùng biển Vịnh Bắc Bộ - Việt Nam được biểu diễn ở dạng lưới ô vuông có kích thước (6' x 6') với 874 điểm lưới. Kết quả tính toán được so sánh với kết quả được cung cấp bởi tổ chức The International Centre for Global Earth Models (ICGEM) cho thấy sự đúng đắn của kết quả tính toán với các thống kê: độ lệch lớn nhất, nhỏ nhất và độ lệch chuẩn đạt được của độ cao geoid tương ứng là 0,0082m; -0,0030m và ±0,0015m và của dị thường trọng lực tương ứng là 0,0588mgal; -0,2607 mgal và ±0,0264mgal.

#### 1. Đặt vấn đề

Trên thế giới, đo cao vệ tinh được ứng dụng rất hiệu quả trong nhiều lĩnh vực trong đó có việc xác định dị thường trọng lực biển, đã có nhiều quốc gia ứng dụng kết quả đo cao vệ tinh để xác định dị thường trọng lực cho vùng biển của mình.

Trong bài toán xác định dị thường trọng lực biển từ số liệu đo cao vệ tinh, có một bước rất quan trọng đó là loại bỏ phần độ cao geoid ( $N_{EGM}$ ) trong số liệu đo cao vệ tinh và khôi phục lại dị thường trọng lực ( $\Delta g_{EGM}$ ) bằng mô hình trường trọng lực toàn cầu theo kỹ thuật "remove - restore". Hiện nay có một số tổ chức trên thế giới như ICGE cho phép tính các đại lượng nêu trên với độ chính xác cao từ hệ số hàm điều hòa

cầu của các mô hình thế trọng trường khác nhau nhưng kết quả tính này chỉ ở dưới dạng mắt lưới ô vuông tùy theo kích thước người sử dụng lựa chọn. Trong bài toán xác định dị thường trọng lực biển bằng số liệu đo cao vệ tinh thì số liệu tính toán lại ở dạng các điểm rời rạc. Như vậy, không thể sử dụng phần mềm sẵn có của tổ chức trên để tính toán dị thường trọng lực và độ cao geoid được. Để khắc phục điều đó trong bài báo này chúng tôi sẽ giới thiệu chi tiết các công thức toán học, để tính ra độ cao geoid và dị thường trọng lực ở điểm bất kỳ trên cơ sở sử dụng các hệ số hàm điều hòa cầu của các mô hình thế trọng trường và được lập thành chương trình máy tính để tính toán.

#### 2. Các công thức tính độ cao geoid và dị thường trọng lực từ các hệ số hàm điều hòa cầu

Công thức tổng quát xác định độ cao geoid và dị thường trọng lực [1,5,6]:

$$N_{EGM} = N_0 + \frac{GM}{\gamma \cdot r} \left[ \sum_{n=2}^{N_{max}} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{n,m} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi') \right], \quad (1)$$

$$\Delta g_{EGM} = \frac{GM}{r^2} \left[ \sum_{n=2}^{N_{max}} \left( \frac{a}{r} \right)^n (n-1) \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{n,m} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{n,m} \sin(m\lambda)) \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi') \right], \quad (2)$$

trong đó:  $GM$  là hằng số trọng trường địa tâm;

$r$  là bán kính địa tâm của điểm xét;

$\gamma$  là gia tốc lực trọng trường chuẩn trên mặt elipsoid;

$a$  là bán trục lớn của ellipsoid;

$\varphi', \lambda$  là vĩ độ và kinh độ địa tâm của điểm xét;

$\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$  là hệ số điều hòa cầu chuẩn hóa đầy đủ bậc n, hạng m;

$\bar{P}_{n,m}(\sin \varphi')$  là hàm Legendre kết hợp đã chuẩn hóa;

$N_0$  là đại lượng mức 0 (zero-degree term).

**a) Tính bán kính r và vĩ độ địa tâm  $\varphi'$  của từng điểm xét**

Bán kính địa tâm của điểm xét được tính bằng công thức:

$$r(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \sqrt{1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2 \varphi}{1-e^2\sin^2 \varphi}}, \quad (3)$$

$$\text{với: } x = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}}; y = \frac{a \cos \varphi \sin \lambda}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}}; z = \frac{a(1-e^2)\sin \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}}. \quad (4)$$

Độ vĩ địa tâm của điểm xét được tính bằng công thức:

$$\varphi' = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arctan \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 \tan \varphi \right], \quad (5)$$

trong đó: b là bán trục bé của ellipsoid;

$\varphi, \lambda$  là vĩ độ và kinh độ địa lý của điểm xét;

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \text{ là tâm sai thứ nhất.}$$

**b) Tính trọng lực chuẩn trên mặt ellipsoid**

Trọng lực chuẩn trên mặt ellipsoid được tính theo công thức:

$$\gamma(\varphi) = \gamma_e \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}} \text{ với } k = \frac{b\gamma_p - a\gamma_e}{a\gamma_e}, \quad (6)$$

trong đó:  $\gamma_e, \gamma_p$  là trọng lực chuẩn trên xích đạo và cực của ellipsoid.

**c) Tính hàm Legendre kết hợp đã chuẩn hóa**

Đặt  $t = \sin \varphi'; u = \cos \varphi'$ , hàm Legendre kết hợp đã chuẩn hóa có thể được tính theo công thức truy hồi như sau:

$$+) \text{ Xét trường hợp } n > m: \bar{P}_{n,m}(t) = a_{n,m} t \bar{P}_{n-1,m}(t) - b_{n,m} \bar{P}_{n-2,m}(t), \quad (7)$$

$$\text{với } a_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n-1)(2n+1)}{(n-m)(n+m)}}; b_{n,m} = \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m-1)(n-m-1)}{(n-m)(n+m)(2n-3)}}. \quad (8)$$

+) Xét trường hợp  $n = m$ :

$$- \text{ Khi: } m < 1 \text{ ta có: } \bar{P}_{0,0}(t) = 1 \text{ và } \bar{P}_{1,1}(t) = \sqrt{3}u. \quad (9)$$

$$- \text{ Khi } m > 1 \text{ ta có: } \bar{P}_{m,m}(t) = u \sqrt{\frac{2m+1}{2m}} \bar{P}_{m-1,m-1}(t),$$

$$\text{hoặc } \bar{P}_{m,m}(t) = u^m \sqrt{3} \prod_{i=2}^m \sqrt{\frac{2i+1}{2i}}. \quad (10)$$

**d) Tính  $\cos(m\lambda)$  và  $\sin(m\lambda)$**

$$\sin(m\lambda) = 2 \cos \lambda \sin((m-1)\lambda) - \sin((m-2)\lambda). \quad (11)$$

$$\cos(m\lambda) = 2 \cos \lambda \cos((m-1)\lambda) - \cos((m-2)\lambda), \quad (12)$$

+) Với  $m=0$ :  $\sin(m\lambda) = 0$ ;  $\cos(m\lambda) = 1$ .

+) Với  $m=1$ :  $\sin(m\lambda) = \sin(\lambda)$ ;  $\cos(m\lambda) = \cos(\lambda)$ .

e) **Tính đại lượng mức 0 (zero-degree term):**  
 $N_0$  Đại lượng này sinh ra khi [2,5]:

- Hằng số trọng trường địa tâm toàn cầu  $GM$  được sử dụng trong mô hình EGM không bằng hằng số trọng trường địa tâm  $GM_0$  của ellipsoid quốc tế.

- Sự khác nhau của tham số hình học của ellipsoid trọng lực khác với ellipsoid quốc tế.

ta có: 
$$N_0 = \frac{GM - GM_0}{R_0 \cdot \bar{\gamma}} - \frac{W_0 - U_0}{\bar{\gamma}}, \quad (13)$$

trong đó:  $R_0$ : bán kính trung bình của trái đất ( $R_0 = 6371\text{km}$ );

$W_0$ : thế trọng trường thực của mặt ellipsoid toàn cầu;

$U_0$ : thế trọng trường chuẩn của mặt ellipsoid quốc tế;

$\bar{\gamma}$ : gia tốc lực trọng trường chuẩn trung bình ( $\bar{\gamma} = 9.7976432222\text{m.s}^{-2}$ ).

Như vậy, áp dụng công thức (13) khi sử dụng mô hình EGM2008 (được gắn với elipsoid trọng lực TFS2008) để tính toán với ellipsoid quốc tế

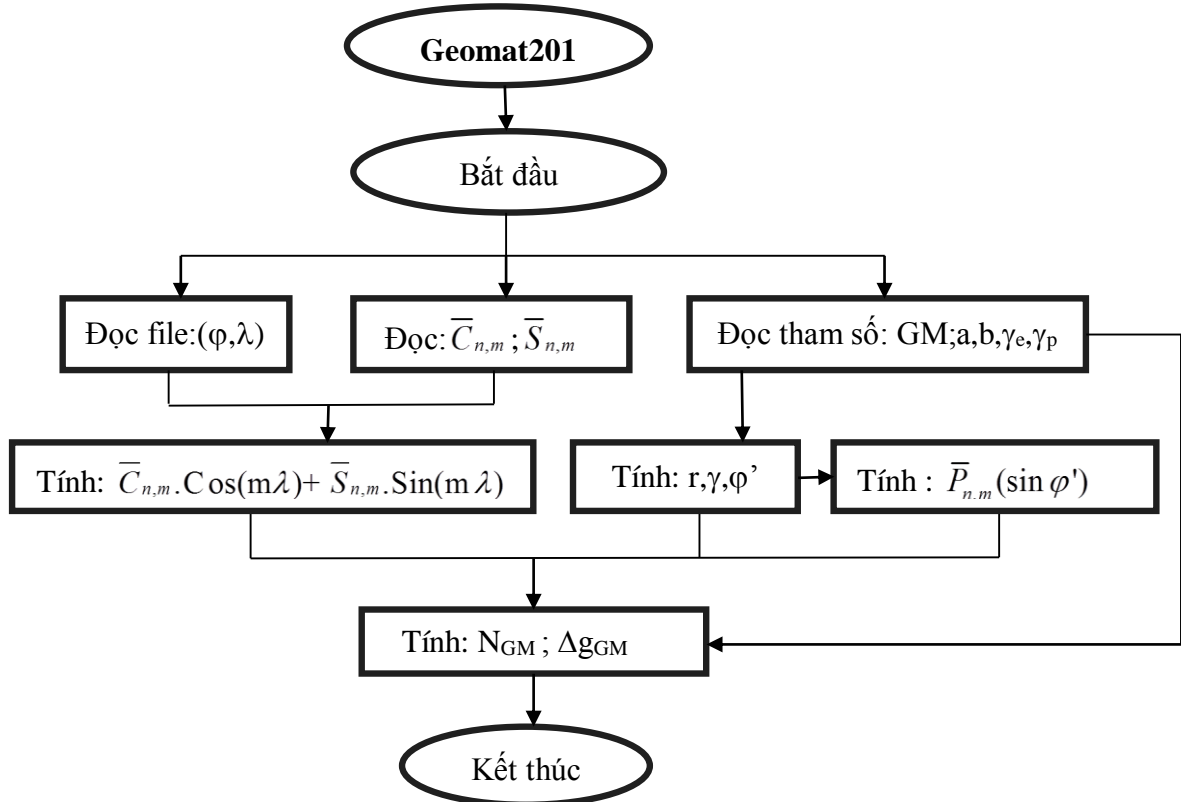
WGS84 thì đại lượng mức 0 (zero-degree term) có giá trị:

$$N_0 = \frac{(3.986004415 - 3.986004418) \cdot 10^{14}}{6371000 \cdot 9.7976432222} - \frac{62636855.6693 - 62636851.7146}{9.7976432222} = -0.4084\text{m}$$

### 3. Xây dựng chương trình tính độ cao geoid và dị thường trọng lực từ các hệ số điều hòa cầu

Trên cơ sở các công thức từ (1) đến (13), chúng tôi đã tiến hành xây dựng chương trình cho phép tính toán của độ cao geoid và dị thường trọng lực của điểm bất kỳ khi cho biết các thành phần tọa độ địa lý ( $\varphi, \lambda$ ) của các điểm cần tính. Chương trình có tên là "**Geomat2015**". Sơ đồ khối của chương trình được trình bày trên hình 1.

Chương trình "**Geomat2015**" là một tổ hợp của 10 chương trình con được viết bằng ngôn ngữ lập trình Matlab: *EGM\_ReadCnmSnm.m*; *radgra.m*; *sinmlcosml.m*; *legfdn.m*; *hundu.m*; *Undulation.m*; *GRA.m*; *DeltaG.m*; *N\_EGM.m*; *G\_EGM.m*. Chương trình được chạy trực tiếp trên nền của phần mềm Matlab.



Hình 1. Sơ đồ khối của chương trình Geomat2015

#### 4. Tính toán thực nghiệm

Các tính toán thực nghiệm được thực hiện với chương trình "Geomat2015" và sử dụng các hệ số hàm điều hòa cầu chuẩn hóa đầy đủ của mô hình thế trọng trường toàn cầu EGM2008 với các hệ số mở rộng tới số bậc 2190 và số hạng 2159 do ICGEM cung cấp[3]. Vùng thực nghiệm là trên vùng biển Vịnh Bắc Bộ - Việt Nam trong phạm vi vĩ độ  $\varphi$  ( $16.9701^0 \div 21.4701^0$ ) và kinh độ  $\lambda$  ( $105.6167^0 \div 108.3167^0$ ) được biểu diễn ở dạng lưới ô vuông có kích thước ( $6' \times 6'$ ) với 874 điểm lưới. Các kết quả tính toán được so sánh với kết quả tính toán do ICGEM cung cấp.

Lý thuyết và các công thức dùng để tính độ cao geoid và dị thường trọng lực của ICGEM [1] hoàn toàn tương tự với các công thức đã nêu

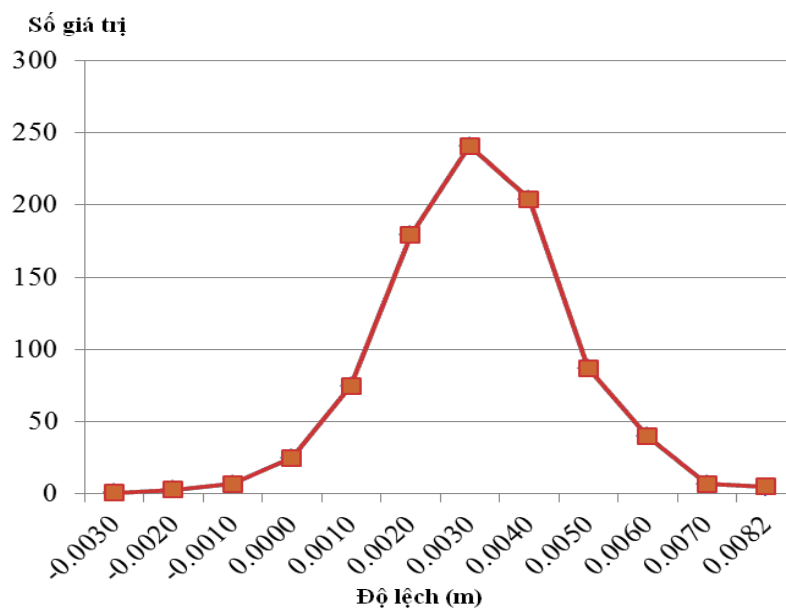
trong bài báo này, cùng với các tham số khi tính toán với ellipsoid WGS84:  $GM = 3.986004418 \cdot 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2$ ; bán trục lớn của ellipsoid  $a = 6378137.0 \text{m}$ .

Các thông kê về độ lệch lớn nhất, nhỏ nhất, trung bình, độ lệch trung phương và độ lệch chuẩn, được thể hiện trên bảng 1.

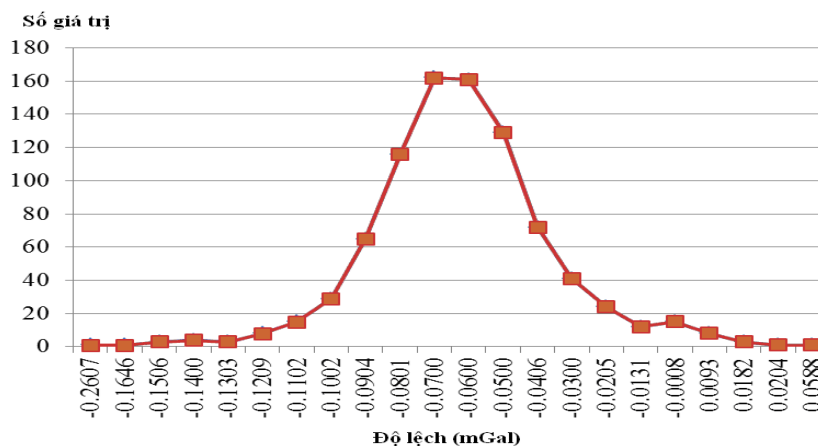
Kết quả tính toán thống kê ở bảng 1 cho thấy, độ lệch giữa kết quả tính được so với kết quả cung cấp bởi ICGEM là rất nhỏ. Độ lệch trung bình nhỏ chứng tỏ trong kết quả tính không có chứa sai số hệ thống. Kết quả này thể hiện sự chính xác của các công thức và chương trình thiết lập được. Độ lệch độ cao geoid và dị thường trọng lực có đồ thị tuân theo luật phân bố chuẩn (hình 2,3).

Bảng 1. Thống kê độ lệch độ cao geoid và dị thường trọng lực được tính từ kết quả của chương trình "Geomat2015" với kết quả được cung cấp bởi ICGEM

Stt	Các chỉ tiêu so sánh	$N_{EGM}$ (m)	$\Delta g_{EGM}$ (mgal)
1	Độ lệch lớn nhất $\Delta_{Max}$	0.0082	0.0588
2	Độ lệch nhỏ nhất $\Delta_{Min}$	-0.0030	-0.2607
3	Độ lệch trung bình $\bar{\Delta}$	0.0027	-0.0672
4	Độ lệch trung phương $\mu$	$\pm 0.0031$	$\pm 0.0722$
5	Độ lệch tiêu chuẩn $\sigma$	$\pm 0.0015$	$\pm 0.0264$



Hình 2. Biểu đồ phân bố độ lệch chuẩn giữa kết quả tính toán độ cao geoid với kết quả được cung cấp bởi ICGEM



Hình 3. Biểu đồ phân bố độ lệch chuẩn giữa kết quả tính toán dị thường trọng lực với kết quả được cung cấp bởi ICGEM

## 5. Kết luận

- Các kết quả tính toán của độ cao geoid và dị thường trọng lực bằng chương trình "Geomat2015" được so sánh với kết quả cung cấp bởi The International Centre for Global Earth Models (ICGEM) đã khẳng định sự đúng đắn cả về cơ sở lý thuyết và tính toán thực nghiệm của chương trình tính.

- Chương trình "Geomat2015" có thể dùng để khảo sát độ cao geoid và dị thường trọng lực từ các hệ số điều hòa cầu của nhiều mô hình trường trọng lực toàn cầu khác nhau cho các điểm bất kỳ khi biết các thành phần tọa độ địa lý ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) của các điểm cần tính.

- Các công thức và chương trình "Geomat2015" có thể được dùng để loại bỏ phần độ cao geoid trong số liệu đo cao vệ tinh và khôi phục lại dị thường trọng lực bằng mô hình trường trọng lực toàn cầu theo kỹ thuật "remove – restore" trong bài toán xác định dị thường trọng lực từ số liệu đo cao vệ tinh.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Franz Barthelmes, 2013. Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation from Spherical Harmonic Models, GFZ German research centre for geosciences.
- [2]. Hà Minh Hòa, 2014. Lý thuyết và thực tiễn của trọng lực trắc địa. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [3]. <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/shms/egm2008.gfc>
- [4]. Martin Vermeer, 2015. Physical Geodesy Maa-6.3271. Toukokuuta.
- [5]. NIMA, 2000. Department of Defense World Geodetic System 1984. National Imagery and Mapping Agency, America.
- [6]. Nico Sneeuw, 2006. Physical Geodesy. Institute of Geodesy, University Stuttgart.
- [7]. Wolfgang Torge, 2001. Geodesy. Third completely revised and extended edition, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

## ABSTRACT

### Determination of geoid height and gravity anomaly from spherical harmonic coefficients

Nguyen Van Sang, Hanoi University of Mining and Geology

Pham Van Tuyen, JSC service and commercial 568

The article presents the detailed mathematical formulas to calculate the geoid height and gravity anomaly by using spherical harmonic coefficients and established a computer program "Geomat2015" by Matlab programming language. The geoid heights and gravity anomalies have been calculated by using spherical harmonic coefficients of the Earth Gravitational Model EGM2008 in Gulf of Tonkin-Vietnam is represented in the form of grid squares of size (6' x 6') with 874 points grid. The results are compared with the results provided by The International Centre for Global Earth Models (ICGEM) shows the correctness of calculation results with statistics: The maximum, minimum deviation and standard deviation of the geoid heights being 0.0082m; -0.0030m and  $\pm 0.0015$ m respectively and gravity anomalies being 0.0588mgal; -0.2607 mgal and  $\pm 0.0264$ mgal respectively.